Matemáticas
Orientaciones didácticas

3°
Secundaria

GOBIERNO DE MÉXICO
MEJOREDU
COMISIÓN NACIONAL PARA LA MEJORA CONTINUA DE LA EDUCACIÓN

Contenido

Matemáticas
Orientación Didáctica 3º de Secundaria

Relevancia

Esta orientación didáctica tiene como finalidad proporcionar a las y los docentes algunas estrategias de enseñanza y recursos didácticos que pueden emplear para el desarrollo y consolidación de conocimientos, habilidades, actitudes y valores del pensamiento matemático que implica, por ejemplo, competencias aritméticas, algebraicas, geométricas, estadísticas y probabilísticas.

Las estrategias de enseñanza propuestas están diseñadas con base en las tres unidades de análisis que conforman la evaluación diagnóstica: número, álgebra y variación; forma, espacio y medida y análisis de datos.

En esta orientación didáctica se hace énfasis en cuestiones relacionadas con la multiplicación y división de números enteros, las expresiones algebraicas equivalentes, el volumen de prismas y cilindros rectos y la comparación y análisis de los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión de dos o más conjuntos de datos estadísticos sin agrupar.

Número, álgebra y variación

Los temas que integran esta unidad de análisis para tercer grado corresponden a la multiplicación y división de enteros, fracciones y decimales positivos y negativos; a la obtención de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas; al reparto proporcional y a la proporcionalidad directa e inversa, particularmente al análisis y la comparación de situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, así como a la interpretación y resolución de problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y de otros contextos y a la formulación y resolución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. También se incluye la verificación algebraica de la equivalencia de expresiones de primer grado que generan sucesiones, así como a la formulación y verificación de expresiones algebraicas para representar propiedades de figuras geométricas como son la obtención de su perímetro y área.

Propósito

Presentar estrategias de enseñanza que contribuyan a fortalecer y consolidar contenidos relacionados con el eje de número, álgebra y variación; en particular, se proponen recomendaciones y estrategias didácticas para el estudio de la multiplicación y la división con números enteros (positivos, negativos y el cero) y el trabajo con expresiones algebraicas equivalentes.

Reactivos asociados de la prueba diagnóstica de 3º de secundaria

Multiplicación y división: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Proporcionalidad: 10, 11, 12 y 13. Ecuaciones: 14, 15, 16 y 17. Funciones: 18, 19 y 20. Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes: 21, 22 y 23.

Aprendizajes esperados de 3º de secundaria

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
- Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
- Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.

Sugerencias de estrategias de enseñanza

- **Problemas de multiplicación con números enteros, decimales y fraccionarios positivos y negativos.** Promueva situaciones que impliquen expresar el resultado de multiplicaciones de un entero positivo por un entero, fracción o decimal negativo a partir de la interpretación de una multiplicación cuando uno de los factores es un número natural, ese factor indica el número de veces que aparece como sumando el otro factor como las siguientes:

$$2 \times (-4) = -4 + (-4) \text{ y } (-8) \times 3 = (-8) + (-8) + (-8)$$

- **Ecuaciones.** Promueva situaciones que impliquen la aplicación de ecuaciones y sistemas de ecuaciones considerando lo siguiente:

  a) Identificar las cantidades conocidas y desconocidas en una situación problemática, así como las relaciones que existen entre ellas y que, mediante una discusión guiada, se llegue a una propuesta común que puede ser simbolizada por medio de una ecuación lineal.

  b) Analizar la solución gráfica que pueden tener los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus distintos casos (solución única, dos soluciones, sin solución –en los racionales e irracionales– como el primer acercamiento e interpretación a la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales de este tipo.

- **Función.** Utilizar las distintas representaciones, incluida la representación algebraica, para analizar la variación lineal e inversamente proporcional.

- **Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes.** Verificar la equivalencia de expresiones realizando las transformaciones algebraicas de una de ellas para obtener la otra, cuando éstas representen la regla de una misma sucesión de figuras o de números. Así como actividades que permitan representar algebraicamente propiedades de figuras geométricas (como el perímetro o el área) y que verifiquen la equivalencia de expresiones.

Números positivos y negativos

El paso que las y los alumnos tienen que dar al transitar de los números naturales a los números enteros es complejo, hay cambios en los conceptos, en las operaciones y en las relaciones entre ellas. Por ejemplo, las relaciones de orden son diferentes, con los números enteros negativos, el número de mayor valor absoluto es menor, como ocurre con – 12 y – 5, – 12 es menor que – 5. Cuando sólo se ha trabajado con números naturales no hay una solución para operaciones como 3 – 8, en cambio en los números enteros se sabe que el resultado es – 5. La relación entre la suma y la resta se vuelve aún más estrecha pues con los números enteros para restar un número se suma su simétrico, es decir, las restas se resuelven convirtiéndolas en sumas. Un ejemplo que causa confusión en las y los estudiantes es el hecho de que al multiplicar dos números negativos o al dividirlos el resultado es un número entero positivo.

El reactivo número 5 de la evaluación diagnóstica de tercer grado de secundaria evalúa la multiplicación y división de números con signo.

¿En cuál de los siguientes procedimientos se resuelven sin error las siguientes operaciones?

$$\frac{(8)\,(-7)\,(6)}{(-4)\,(-2)\,(-3)} =$$

A) $\frac{(8)\,(-7)\,(6)}{(-4)\,(-2)\,(-3)} = \frac{-336}{-24} = -14$

B) $\frac{(8)\,(-7)\,(6)}{(-4)\,(-2)\,(-3)} = \frac{336}{24} = 14$

C) $\frac{(8)\,(-7)\,(6)}{(-4)\,(-2)\,(-3)} = \frac{-336}{24} = -14$

D) $\frac{(8)\,(-7)\,(6)}{(-4)\,(-2)\,(-3)} = \frac{-336}{-24} = 14$

Se trata de un reactivo en contexto puramente matemático y en el que se tiene que elegir el procedimiento correcto. Observe que el análisis se centra más en el manejo de signos que en el de la multiplicación y la división por sí misma debido a que, en todas las opciones, se presentan cantidades con los mismos valores absolutos (336, 24 y 14) y en el que lo que cambia es el signo.

Un primer momento al enfrentarse a este reactivo es que se interprete de manera correcta las operaciones y simbología que está en juego. Veamos:

a) Hay que reconocer que los números del dividendo (8, – 7 y 6) así como los del divisor (– 4, – 2 y – 3) se están multiplicando. En este sentido es necesario reconocer que cuando dos números con paréntesis aparecen sin ningún signo entre ellos esto indica una multiplicación. Es probable que haya quienes, erróneamente, interpreten que estos números se están sumando o restando, no obstante, como se presentan en las opciones se presentan los números 336 y 24 se infiere que se trata de multiplicaciones.

b) También es necesario que se interprete que la fracción resultante indica una división, esto lleva a considerar a la fracción como cociente: toda fracción indica una división del numerador entre el denominador. Esto significa que el numerador (– 336) es el dividendo y el denominador (– 24) es el divisor. En lo sucesivo le llamaremos dividendo y divisor, aunque queda implícito el hecho de que al mismo tiempo son numerador y denominador respectivamente.

c) Otro hecho importante es que se identifique que los números que no tienen signo son positivos (como el 8 y el 6).

Una vez que la expresión $\frac{(8)(-7)(6)}{(-4)(-2)(-3)}$ se ha interpretado correctamente, hay varias maneras para hallar la respuesta, veamos algunas de ellas.

1. Un primer procedimiento es multiplicar los números que aparecen en el dividendo y en el divisor en el orden en que aparecen y luego hacer la división que corresponda.

$$\frac{(8)(-7)(6)}{(-4)(-2)(-3)} = \frac{(-56)(6)}{(8)(-3)} = \frac{(-336)}{(-24)} = 14$$

2. También es probable que se resuelvan las multiplicaciones en otro orden en el que aparecen, esto es correcto debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación (el orden de los factores no altera el producto). Por ejemplo:

$$\frac{(8)(-7)(6)}{(-4)(-2)(-3)} = \frac{(8)(-42)}{(-4)(6)} = \frac{(-336)}{(-24)} = 14$$

   Incluso que se elija multiplicar números que no aparecen uno al lado de otro.

$$\frac{(8)(-7)(6)}{(-4)(-2)(-3)} = \frac{(48)(-7)}{(12)(-2)} = \frac{(-336)}{(-24)} = 14$$

3. También es probable que, al darse cuenta de que siempre aparecen los mismos valores absolutos, haya quienes sólo se fijen en los signos para determinar cuál respuesta es la que tiene los signos correctos en el dividendo y en el divisor. Haciendo un análisis similar al siguiente:

$$\frac{(+)(-)(+)}{(-)(-)(-)} = \frac{(-)(+)}{(+)(-)} = \frac{(-)}{(-)} = +$$

4. Es probable que quienes tengan un sentido numérico desarrollado traten de encontrar el resultado haciendo uso de algunos hechos matemáticos. Por ejemplo, que noten que el 8 que está en el dividendo "se cancela" con el (– 4) (– 2) del divisor. Aunque en la práctica se suele decir "se cancela", en realidad lo que sucede es que $\frac{8}{8} = 1$, y cualquier número multiplicado por 1 da como resultado el mismo número, por lo que se pueden considerar sólo los números que quedan.

$$\frac{(8)(-7)(6)}{(-4)(-2)(-3)} = \frac{(-7)(6)}{-3} = \frac{-42}{-3} = 14$$

   Un procedimiento similar resulta al "cancelar" el 6 del dividendo con el (– 2) (– 3) del divisor.

   Un problema para quienes hagan cálculos similares será el que en su respuesta no aparezca el $\frac{-336}{-24}$, y dado que en las opciones hay dos en el que aparece como resultado final el 14 positivo esto los conducirá a tener que hacer un análisis de signos (como el del procedimiento 3) para elegir si la opción B) o la D) es la respuesta correcta.

Con respecto a quienes hayan elegido una respuesta incorrecta el error que cometen es el manejo de los signos. Veamos:

a) Para el inciso A, el error que se comete es en la regla de los signos para la división de números con igual signo $\frac{-336}{-24}$ no da como resultado un número con el mismo signo, quizás están aplicando la regla para sumar dos números negativos.

b) Quienes respondieron el inciso B, se acercaron mucho a la respuesta correcta (14 positivo). No obstante, cometieron error en el manejo de los signos de la multiplicación tanto en el dividendo como en el divisor. Conviene analizar este inciso. Si bien el cociente $\frac{336}{24}$ es equivalente al cociente $\frac{-336}{-24}$, habría que investigar con las y los estudiantes que eligieron esta opción de respuesta cuál fue el análisis que hicieron de los signos, pues es muy probable que hayan hecho un análisis correcto al considerar, por ejemplo, que el signo menos del -7 y el signo negativo del -2 va a dar como resultado un signo positivo y consideren que pueden ignorar ambos signos (lo cual es correcto) en este caso los signos del dividendo y del divisor dan como resultado números positivos. Este sería un caso poco probable que conviene indagar con las y los estudiantes.

c) Quienes eligieron el inciso C cometen un error de signo en la multiplicación del dividendo y obtienen, erróneamente un 24 positivo, es probable que estén aplicando la regla para sumar dos números en la que el resultado tiene el signo del número con mayor valor absoluto.

La enseñanza de la multiplicación y división de números positivos y negativos

Como la mayoría de los contenidos matemáticos, la enseñanza de la multiplicación y la división de números positivos y negativos requiere del dominio de otros contenidos que son antecedentes para abordar estas operaciones. En particular es importante que las y los estudiantes hayan trabajado con situaciones donde los números negativos cobran sentido (temperaturas, pérdida y ganancias, altitud con respecto al nivel del mar, línea del tiempo, etc.). Asimismo, es importante que hayan comprendido y trabajado con la adición y la sustracción de números positivos y negativos. El hecho de que requieran estos antecedentes no debe verse como un obstáculo para hacer un repaso de la multiplicación y la división de números enteros, más bien es importante considerarlo como una oportunidad para repasar estos antecedentes, consolidarlos y profundizar sobre ellos.

De esta manera, lo que se pretende en esta unidad didáctica es hacer un recorrido rápido sobre la enseñanza de la multiplicación y la división de enteros con bases más sólidas. Un posible camino para hacer este repaso es el siguiente:

- Comentar los contextos en los cuales los números negativos se usan.
- Diferenciar entre el signo (+) para operación y para indicar un número positivo; y el signo (–) para indicar una sustracción o un número negativo. Si bien se usan los mismos signos es importante diferenciar cuál es el uso que se les está dando en las expresiones matemáticas.
- Trabajar la idea de valor absoluto de un número con signo y la idea de números simétricos.
- Repasar la manera en que se suman números en los casos:

a) En que los dos son positivos (se ha trabajado desde la escuela primaria).

b) En que los dos son negativos.

c) En que uno es negativo y el otro positivo.

Puede trabajarse lo anterior en situaciones contextualizadas y también se puede trabajar con la recta numérica y en contextos puramente matemáticos. Es importante que sea el estudiantado quienes construyan las reglas para resolver las operaciones de números con signo. En primer grado se trabajó con la adición y la sustracción de números positivos y negativos, es decir números enteros; donde las reglas son:

- **La adición de dos números enteros con el mismo signo se resuelve sumando los valores absolutos y conservan su signo.**
- **La adición de dos números enteros con diferente signo se resuelve restando el de menor valor absoluto al de mayor valor absoluto y el signo del resultado es el signo del que tiene mayor valor absoluto.**
- **Restar un número entero equivale a sumar su simétrico (u opuesto).**

En segundo grado de secundaria estudiaron la multiplicación y división de números positivos y negativos, y es importante mencionar que lo que está en juego en primer lugar es el manejo de los signos, ¿qué signo tiene el resultado de dos factores de números positivos?, ¿de dos negativos? y ¿el resultado de multiplicar un número positivo por uno negativo? Como se sabe, algunos de estos hechos matemáticos pueden parecer ilógicos: “¿por qué menos por menos da más?, ¿por qué menos entre menos da más?”

Para revisar la multiplicación y división de números enteros, se propone una serie de actividades que podrá utilizar según el grado de conocimientos de las y los estudiantes.

1. Recuerde a las y los alumnos que en la primaria se aprende que una multiplicación como $(4)(3)$ puede interpretarse como una suma de sumandos iguales, es decir, sumar 4 veces el 3.

$$(4)(3) = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

a) ¿Qué significado le pueden dar a la multiplicación $(4)(-3)$?

b) ¿Qué signo tiene el resultado?

c) Encuentren el resultado de las siguientes multiplicaciones considerando la interpretación de sumas con sumandos iguales.

$(4)(-2) =$ ________	$(3)(-5) =$ ________
$(6)(-1) =$ ________	$(7)(-10) =$ ________
$(8)(-3) =$ ________	$(2)(-15) =$ ________

d) ¿Qué signo tiene el resultado de una multiplicación cuando el primer factor es positivo y el segundo negativo?

e) Escriban una regla para multiplicar un número positivo por uno negativo.

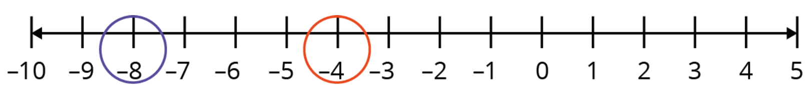
La idea de esta actividad es retomar los conocimientos previos en cuanto a una interpretación de la multiplicación (suma de sumandos iguales) para encontrar el sentido a multiplicaciones donde el primer factor es positivo y el segundo es negativo, por ejemplo (4) (– 3). Éste es un buen momento también para repasar cómo se resuelven las sumas de números negativos; y acorde con el enfoque de resolución de problemas, se espera que en el inciso **e** las y los alumnos construyan una regla para resolver este tipo de multiplicaciones.

2. Completen la siguiente tabla anotando en la segunda columna los resultados de las multiplicaciones indicadas.

(4) (3) =	
(4) (2) =	
(4) (1) =	
(4) (0) =	
(4) (–1) =	
(4) (–2) =	
(4) (–3) =	
(4) (–4) =	

a) Analicen la secuencia de resultados. Observen que los resultados van disminuyendo. ¿De cuánto en cuánto van disminuyendo los resultados de estas multiplicaciones?

Se espera que no haya dificultad en completar esta tabla. Las primeras tres multiplicaciones se han trabajado desde la educación primaria y las últimas cuatro corresponden al caso estudiado en la actividad **1**. El propósito de esta actividad es que las y los alumnos observen la secuencia de los resultados y logren identificar el patrón. En las primeras multiplicaciones es muy notorio que los resultados disminuyen (12, 8, 4, 0); y para las siguientes multiplicaciones es probable que haya quien aún no ha consolidado el orden en los números negativos, por ejemplo, que piense que – 4 es menor que – 8; y para afianzar el orden correcto de los números negativos, se puede considerar ejemplificar que – 8 es una temperatura más baja que – 4 o analizar que un número colocado a la izquierda de otro en la recta numérica es menor, así se puede observar que – 8 está a la izquierda de – 4.



Analizar tablas como la de esta actividad es útil para otros casos en donde se requiere la multiplicación de números positivos y negativos. Se sugiere practicar con tablas donde el primer factor sea positivo y los siguientes factores vayan disminuyendo de 1 en 1, incluyendo números negativos.

3. Para la siguiente tabla serán útiles los resultados de la tabla anterior. Observen que son las mismas multiplicaciones, pero se ha cambiado el orden de los factores. Anoten en la segunda columna los resultados de las multiplicaciones indicadas.

(3) (4) =	
(2) (4) =	
(1) (4) =	
(0) (4) =	
(–1) (4) =	
(–2) (4) =	
(–3) (4) =	
(–4) (4) =	

a) ¿Tienen una secuencia los resultados?

b) ¿Cómo varía la secuencia de los resultados?

c) ¿Qué signo tienen los resultados cuando el primer factor es negativo y el segundo positivo?

d) Analicen los resultados al multiplicar números negativos por números positivos y redacten una regla.

Esta actividad constituye una buena oportunidad para recordar la propiedad conmutativa de la multiplicación: “el orden de los factores no altera el producto”. Para dar sentido a multiplicaciones como (– 3) (4) se utilizan dos recursos:

- Por un lado, en la actividad **1** se interpretó (4) (– 3) para concluir que cuando el primer factor es positivo y el segundo negativo el resultado es negativo. Ahora bien, si aplicamos la propiedad conmutativa de la multiplicación se tiene que (4) (– 3) = (– 3) (4) = – 12. Lo que lleva a concluir que cuando el primer factor es negativo y el segundo positivo, el resultado también es negativo.
- Por otro lado, se presenta una tabla y se analiza la secuencia que siguen los resultados, así que incluso si no se aplicara la propiedad conmutativa, pero se completan los resultados siguiendo el patrón de la secuencia se llega a la misma conclusión.

De ser posible construyan y analicen otra tabla con un segundo factor positivo y el primero que varía de uno en uno desde el 3 hasta el – 4.

Enfatice que, a diferencia de la suma, en la multiplicación no importa cuál número tiene mayor valor absoluto para determinar el signo del resultado. En esta operación el producto de dos números con diferente signo siempre será negativo, independientemente del valor de los números.

4. Completen la siguiente tabla. Anoten en la segunda columna los resultados de las multiplicaciones indicadas.

(–4) (3) =	
(–4) (2) =	
(–4) (1) =	

(– 4) (0) =	
(– 4) (– 1) =	
(– 4) (– 2) =	
(– 4) (– 3) =	
(– 4) (– 4) =	

a) ¿Tienen una secuencia los resultados?

b) ¿Cómo varía la secuencia de los resultados?

c) ¿Qué signo tienen los resultados cuando el primer factor es negativo y el segundo negativo?

d) Analicen los resultados al multiplicar dos números negativos y redacten una regla.

En esta actividad se trabaja con el caso menos intuitivo de la multiplicación de dos números con signo: cuando se multiplican dos números negativos el resultado es positivo. Es muy importante analizar que en la tabla presentada los resultados van aumentado de 4 en 4. Las primeras multiplicaciones ya han sido trabajadas en la actividad **3** por lo que se espera que sin problema se completen con los números – 12, – 8, – 4, 0. Analizar estos resultados constituye otra buena oportunidad para seguir repasando el orden de los números negativos y notar que van aumentando de cuatro en cuatro.

De ser posible construya otras tablas similares, ahora con un factor negativo y otro que varíe de 1 en 1 desde el 3 hasta – 4. Analicen si en esas otras tablas se sigue un patrón similar y para seguir cumpliendo el patrón los resultados de las multiplicaciones con dos números negativos tienen que ser positivos.

5. Apliquen las reglas para multiplicar números positivos y negativos y resuelve las siguientes operaciones.

(8) (– 3) =	(– 8) (3) =	(– 8) (– 3) =
(– 5) (– 9) =	(5) (– 9) =	(– 5) (9) =
(2) (4) (– 7) =	(– 2) (– 4) (7) =	(2) (– 4) (– 7) =
(3) (– 1) (– 4) =	(8) (– 2) (– 6) =	(12) (0) (– 9) =

En esta actividad se deben aplicar las reglas construidas en las actividades anteriores. Se añade un aspecto: hay multiplicaciones con tres factores, situación que servirá para revisar y discutir cómo se resuelve este tipo de multiplicaciones.

6. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué número multiplicado por 8 da 40?

b) ¿Qué número multiplicado por 8 da – 40?

c) ¿Qué número multiplicado por – 8 da 40?

d) ¿Qué número multiplicado por – 8 da – 40?

e) Las preguntas anteriores se pueden representar con una división, complétenlas.

$\frac{40}{8} =$ $\frac{-40}{8} =$ $\frac{40}{-8} =$ $\frac{-40}{-8} =$

Con esta actividad se inicia el repaso de las divisiones de números con signo.

Una manera de interpretar a la división es como la búsqueda de un factor desconocido cuando se conoce el valor del otro factor y del producto de ambos factores.

Existen varias maneras de simbolizar una división; una de ellas es expresarla como fracción. Los elementos de la división son:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$$

Una vez que se hayan completado las divisiones solicite que la comprobación multiplicando el cociente por el divisor para obtener el dividendo poniendo especial atención a los signos.

7. Resuelvan las siguientes divisiones. Recuerden comprobarlas multiplicando el resultado por el divisor para obtener el dividendo.

$\frac{32}{8} =$ $\frac{-32}{4} =$ $\frac{32}{-4} =$ $\frac{-32}{-4} =$

$\frac{50}{5} =$ $\frac{-50}{5} =$ $\frac{50}{-5} =$ $\frac{-50}{-5} =$

a) Redacten una regla para dividir números positivos y negativos.

El propósito de esta actividad es practicar la división de números con signo y construir la regla de los signos para esta operación: Si dividendo y divisor tienen el mismo signo el resultado es positivo, si tienen diferente signo el resultado es negativo.

8. Resuelvan las siguientes operaciones. Si el resultado es una fracción, simplifíquenla.

$\frac{(4)(-3)(3)}{(-6)(-3)(-1)} =$ $\frac{(8)(-9)(1)}{(-2)(2)(-3)} =$

$\frac{(10)(12)(1)}{(6)(5)(4)} =$ $\frac{(-7)(9)(2)}{(2)(-4)(3)} =$

Preguntas de reflexión:

- ¿Qué significado se le puede dar a la multiplicación $(5)(-3)$?
- ¿Por qué $(5)(-3)$ es lo mismo que $(-3)(5)$?
- ¿Qué signo tiene el producto de dos números negativos?
- ¿Cuál es el resultado de la multiplicación $(x)(0)$?
- ¿Cuál es el resultado de la multiplicación $(x)(-1)$?
- ¿Qué signo tiene el cociente si el dividendo y el divisor son negativos?
- Si el dividendo es cero, ¿cuánto vale el cociente?
- Si el divisor es cero, ¿cuánto vale el cociente?
- Si el divisor es -1, ¿cómo son entre sí el cociente y el dividendo?
- Si el cociente es -1, ¿cómo son entre sí el dividendo y el divisor?
- ¿El cociente siempre es menor que el dividendo? ¿Por qué?

Se sugiere proponer situaciones problema que generen y promuevan procesos de reflexión y argumentación y no sólo la aplicación de algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con números enteros. Considere que entre otros aspectos implica dar un nuevo significado a los números positivos que incluye considerar una nueva forma de escritura ($+a = a$) y que puede provocar confusión en las y los alumnos.

Más actividades

1. Si a es un número entero, ¿qué signo tendrá $(a)(-1)$ cuando sustituyas ***a*** por su valor? ¿por qué?
2. Tomando en cuenta que los números enteros son los positivos, los negativos y el cero, ¿el producto de dos números enteros siempre es mayor que cualquiera de sus factores? ¿por qué?
3. Si x es un número entero, el resultado de $\frac{x}{-1}$ ¿es negativo o positivo? ¿por qué?

La enseñanza del álgebra

Según Kieran y Filloy (1989):

> “[...] los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en los temas de aritmética [Número en nuestro programa de estudio]. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra.”

Es importante reflexionar sobre lo anterior si se pretende y reconoce la transcendencia del aprendizaje del álgebra. La adquisición de las nociones algebraicas toma tiempo para completarse y, además, no todos aprenden con la misma facilidad o rapidez. Algunos de los recursos imprescindibles para el desarrollo del pensamiento abstracto y la resolución de problemas algebraicos son:

- La introducción gradual de las expresiones con literales y las primeras reglas de escritura algebraica.
- La resolución de ecuaciones que pueden resolverse por medios aritméticos (llamadas, ecuaciones de un paso).
- La jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis en la aritmética.

Lo anterior representan una buena introducción al álgebra y esto lo han realizado las y los alumnos en primero y segundo grado, junto con el uso de las literales como variables, expresiones generales y ecuaciones; la resolución de ecuaciones; el análisis e interpretación de funciones lineales y de sus gráficas.

De ahí que todo lo referente a álgebra representa una parte central en la evaluación diagnóstica y dentro de los aspectos que se indagan sobre el dominio algebraico de las y los alumnos en los reactivos se encuentra identificar expresiones algebraicas equivalentes a partir de una sucesión, lo que implica verificar algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de una sucesión numérica

Emma ha decidido ahorrar diariamente. La tabla muestra la cantidad ahorrada durante los primeros cinco días.

Día	1	2	3	4	5
Cantidad ahorrada	$20	$27.5	$35	$42.5	$50

¿Cuáles expresiones permiten calcular la cantidad ahorrada por Emma diariamente?

I. $7.5n + 20$
II. $7.5n + 12.5$
III. $7.5(n - 2) + 27.5$
IV. $15(n - 1) + 20$
V. $15(n - 1) + 27.5 - 7.5n$

A) I, II, IV

B) I, III, IV

C) II, III, V

D) II, IV, V

La respuesta correcta es C, para responder acertadamente, el estudiante identifica las tres expresiones algebraicas equivalentes que representan la expresión general de la sucesión dada.

Error del lenguaje algebraico. Este error se asocia a la expresión oral y escrita de la terminología y notaciones propias del álgebra y de su interpretación, debido probablemente a que en él se producen conflictos con el lenguaje de uso cotidiano, a la precisión que se requiere en el uso del lenguaje matemático. Este error se hace evidente cuando el estudiante interpreta inadecuadamente el enunciado de la situación dada y no genera la expresión algebraica que corresponde con la regla general de la sucesión que permite generar sus términos. (A, B y D)

Errores de razonamiento. Se asocian al mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, lo cual conlleva el manejo errado de los axiomas, teoremas, corolarios y definiciones. Determina la regla general de la sucesión de forma inadecuada, no verifica que se puede generar todos los términos de la sucesión, o bien, que no aplica las transformaciones algebraicas a cada una de las expresiones para verificar la equivalencia.

Expresiones equivalentes

Es posible identificar si las y los estudiantes tienen dificultades en los contenidos de álgebra debido a que aplican solamente su pensamiento aritmético a partir de los siguientes referentes que Kieran y Filloy (1989) proponen:

a) su forma de ver el signo igual. Para muchos el signo de igual es una señal de lo que se debe hacer o de hacer algo y, en el pensamiento algebraico, el signo de igual es un símbolo de equivalencia entre ambos lados de una ecuación. Aquellos alumnos que no lo ven así no entienden incluso expresiones como $4 + 3 = 6 + 1$. Esto, también refleja que no han desarrollado un buen sentido numérico.

b) sus dificultades con la concatenación y con algunas de las convenciones de notación del álgebra. En aritmética, la concatenación denota adición. Por ejemplo, 37 significa 30 + 7. Sin embargo, en álgebra, la concatenación significa multiplicación 4b significa $4 \times b$.

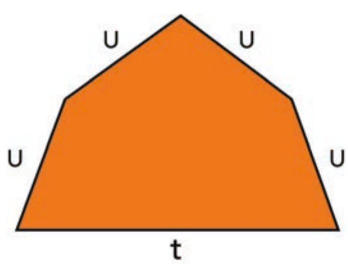
c) su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas.

En matemáticas los símbolos para las variables habitualmente son letras, combinadas a veces unas con otras o con números (A1, A2, ..., An). Hans Freudenthal (1983), pp. 19. La parte literal de una expresión algebraica tiene diversos significados que varían de acuerdo con el problema en el cual está inmerso. Así la literal puede ser: incógnita, número general, variable (relación funcional), parámetro o constante.

Dentro de las actividades que se recomiendan para apoyar a quienes aún tiene dificultades están:

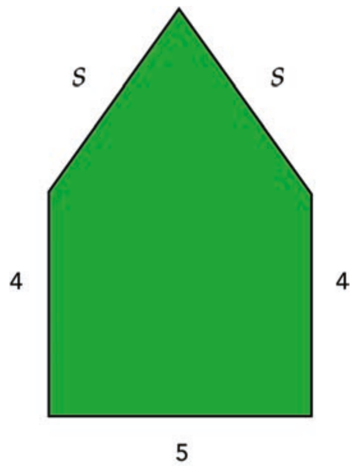
1. Representen algebraicamente el perímetro de figuras geométricas (como el perímetro o el área) y que verifiquen la equivalencia de expresiones realizando las transformaciones algebraicas de una de ellas para obtener la otra.

a)



Perímetro =

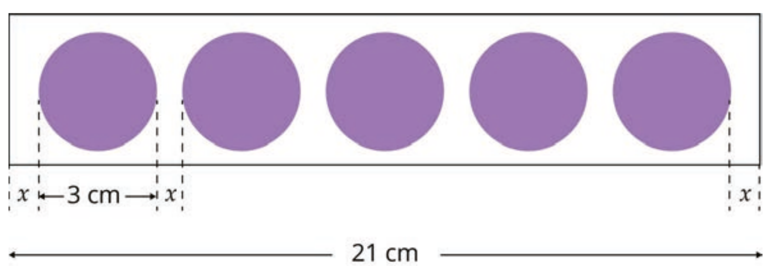
b)



Perímetro=

A pesar de que las y los alumnos ya en los últimos grados de primaria han expresado fórmulas sencillas para calcular perímetros y áreas de figuras, estas fórmulas sólo han sido vistas como abreviaturas de los procedimientos de cálculo, no las han considerado como expresiones con literales para simbolizar una relación aritmética o geométrica entre cantidades, es hasta secundaria donde lo realizan.

2. Observen la imagen corresponde a una tira de cartulina en la que se trazaron cinco círculos del mismo diámetro a distancias iguales. Si cada círculo mide 3 cm de diámetro, ¿cuánto deben medir las separaciones entre los círculos señaladas con la letra x?



En este caso se espera que propongan diversas expresiones algebraicas que representa la ecuación $6x + 15$ cm = 21 cm como son:

$$x + 3 + x + 3 + x + 3 + x + 3 + x + 3 + x = 21$$

$$x + x + x + x + x + x + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

$$15 + x + x + x + x + x + x = 21$$

En este tipo de actividad hay que dejarlos con la libertad de proponer y escribir sus propias ecuaciones, ya que dan lugar a muchas escrituras diferentes, como puede apreciarse existe una gran cantidad de ellas. Aproveche para revisar y enriquecer la comprensión de las reglas de escritura abreviada. Será interesante analizar, discutir y verificar con las y los alumnos las diversas expresiones equivalentes simplificadas que también tiene la situación propuesta. Por ejemplo:

$$15 + 4x + 2x = 21 \text{ o } 15 + 3x + 3x = 21 \text{ o}$$

$$21 = 15 + 6x \text{ o } 21 = 6x + 15 \text{ o } 15 + 6x = 21 \text{ o } 6x + 15 = 21$$

Otro recurso que han utilizado desde primaria son las representaciones tabulares en dos columnas, principalmente para organizar y analizar situaciones de proporcionalidad directa e inversa, ahora con los nuevos conocimientos que están estudiando, este recurso también les permitirá comprender otras relaciones y maneras de expresarlas.

A partir de completar, analizar y elaborar tablas de dos columnas, las y los alumnos encontrarán la regla que relaciona los números de la primera columna con los de la segunda y la expresarán simbólicamente. Estas actividades también son un recurso importante que favorece la noción de función.

Además, al mismo tiempo, al analizar y completar tablas con “espacios vacíos” tanto en la primera como en la segunda columna, les ayudará a consolidar las nociones relacionadas con el carácter inverso de las operaciones de adición y sustracción, así como de multiplicación y división.

3. Completen las siguientes tablas.

a)

1	4
2	5
3	6
4	
5	
	9
x	

b)

1	3
2	6
3	
4	
	15
	24
x	

c)

1	0
2	3
3	6
4	
5	
	15
	24
x	

Completar tablas como la siguiente permitirá que las y los alumnos las empleen gradualmente, ya que les permiten comprender las maneras de expresión usuales en el álgebra, complementado con respuestas de preguntas como las que siguen:

a) Si la x es 25, ¿cuál será el valor de y?

b) ¿Para qué valor de x, la y vale 48?

c) ¿Cómo calculas el valor de y, si conoces el valor de x?

d) ¿Qué sucede con los valores de y cuando crecen los valores de x?

Cuando es posible encontrar la respuesta a la pregunta del inciso b, la expresión algebraica general se convierte en una ecuación, porque se iguala a un valor, en este caso 48. Las expresiones algebraicas para cada caso quedan de la siguiente manera:

a) $x + 3 = 48$ **b)** $3x = 48$ **c)** $3x - 3 = 48$

Otras actividades que deberán proponerse consisten en completar tablas a partir de expresiones algebraicas.

4. Consideren que $y = 3(x - 1)$ para completar siguiente la tabla:

x	$y = 3(x-1)$
1	
2	
3	
	9
9	

a) Comparen los valores de esta actividad con los de la actividad **1**. ¿Hay alguna que tengan los mismos valores en ambas columnas?

b) En caso afirmativo, comparen las expresiones algebraicas que generan cada tabla. Realicen las transformaciones necesarias para pasar de una expresión a otra y verificar que son equivalentes.

En otras actividades, las y los alumnos deberán proponer y elaborar la representación tabular, eligiendo los valores para x más convenientes, ofreciendo así una oportunidad para ampliar sus conocimientos y habilidad con respecto a número y utilizando la regla para encontrar los valores correspondientes de y. En este caso, es conveniente pedirles que empleen elementos de notación simbólica en los encabezados de las columnas para identificarlas. Por ejemplo, podemos nombrarlas por medio de las letras *x, y o m y n o s y t*, ...entre otras.

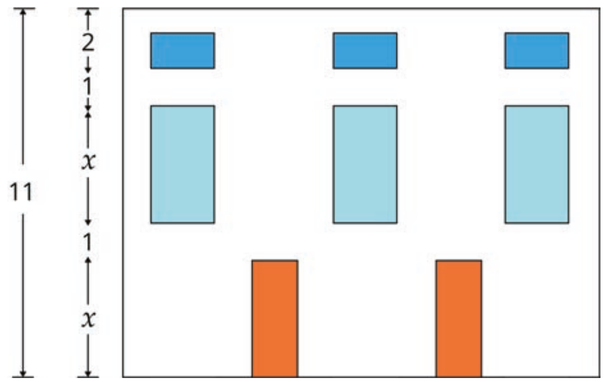
Preguntas de reflexión

- ¿Qué significado puede tener una literal cuando se usa en álgebra?
- ¿Por qué $4(x+5) = 45$ es una ecuación?
- ¿Cuál es la diferencia entre variable e incógnita?

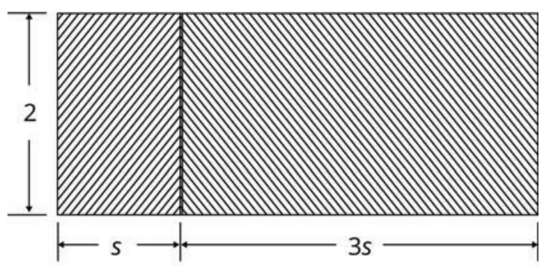
Más actividades

Resuelvan los siguientes problemas.

1. ¿Cuál es el valor de x?



2. ¿Cuál es el valor de s?



Área = 64 m²

3. ¿Cuál es el valor de x?

$3(x + 12) = 48 \quad x = ?$

Área sombreada = 48

Forma, espacio y medida

Los temas que integran esta unidad de análisis para tercer grado de secundaria corresponden a figuras y cuerpos geométricos y medidas. En especial, el estudio de la forma y del espacio propician el razonamiento deductivo de las y los estudiantes. Además, estos temas promueven el desarrollo de habilidades de comunicación, dibujo, construcción, estimación e imaginación espacial.

Propósito

Proponer a las y los docentes estrategias didácticas y recursos que les permitan apoyar a las y los alumnos en la obtención de las fórmulas para calcular el volumen o algunas otras medidas geométricas implicadas con los prismas y cilindros rectos, de tal manera que puedan comprender que el volumen es una magnitud de los objetos.

Reactivos asociados de la prueba diagnóstica de 3º de secundaria

Figuras y cuerpos geométricos: 24, 25 y 26. Magnitud y medidas: 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 y 40.

Aprendizajes esperados de 3º de secundaria

- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.

Sugerencias de estrategias de enseñanza

- **Figura y cuerpos geométricos.** Aspectos relacionados con los polígonos regulares e irregulares: número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice, número de diagonales en total y suma de sus ángulos interiores. Además, las medidas de sus ángulos interior, exterior y central, y las relaciones entre ellos. También resolverán problemas de construcción de polígonos regulares con instrumentos geométricos a partir de varios datos.
- **Perímetro y área.** Obtener las fórmulas de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos, dando argumentos. Emplear números naturales, decimales y fraccionarios para las dimensiones.

- **Volumen.** Promover actividades en contextos geométricos y no geométricos que impliquen determinar el volumen de prismas y cilindros rectos o de algunos de sus elementos como: lado, altura de la base, altura de prisma y del cilindro. Emplear números naturales, decimales y fraccionarios para las dimensiones.

- **Conversión de medidas.** Realizar actividades de indagación y estimación, por ejemplo, cuántas veces cabe un pie en un metro, un centímetro en una pulgada o un litro en un galón.

El volumen

El volumen es una magnitud de uso común, como lo señala Sáiz (2007):

> "En nuestra vida cotidiana nos movemos en un mundo de tres dimensiones. Todos los objetos que existen en este mundo tienen volumen. Nuestros movimientos de manera implícita toman en consideración nuestro propio volumen [...] el volumen es la magnitud de nuestro mundo".

Podemos observar a nuestro alrededor que todo lo que nos rodea son cuerpos tridimensionales. Por otro lado, medir es una actividad que han realizado las y los estudiantes como parte de su proceso de estudio de las matemáticas desde los primeros grados de su educación básica, por lo que no les parece extraño que sea necesario medir el volumen de diversos objetos, particularmente, aquellos que tienen forma de prismas y cilindros rectos.

Según Bishop (1999), medir es común a todas las culturas porque es la tercera actividad universal y también medir es comparar, ya que la necesidad de medir solo se plantea si se quieren comparar dos o más fenómenos. Además, medir es asignar un número a una propiedad de un objeto.

En el caso del volumen es medir el espacio que ocupa un cuerpo en tres dimensiones. El enfoque didáctico del tema propone que las y los alumnos construyan conocimientos y habilidades que les haga sentido y significado para saber y entender como calcular el volumen de prismas y cilindros rectos en diversas situaciones, saber aplicar distintas técnicas de resolución y formular argumentos que validen sus procedimientos y resultados.

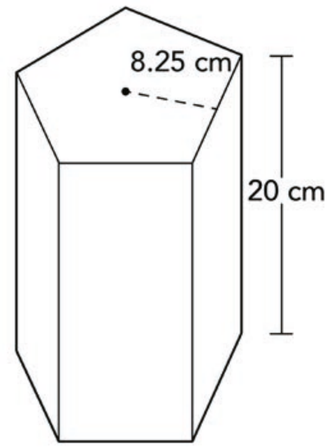
Prisma recto. Cuerpo geométrico limitado por dos polígonos iguales que pueden ser triangulares, rectangulares o poligonales, llamados bases y a partir de ellas se definen las caras laterales. Por ejemplo, a partir del número de lados que tiene el polígono de base, se determina el número de paralelogramos que se utilizarán como caras laterales. Así un prisma recto con base triangular tiene tres caras laterales mientras que un prisma recto pentagonal tiene cinco caras laterales.

La resolución de problemas debe construirse a partir de que las y los alumnos identifiquen los datos brindados, así como los datos que deben encontrar, enseguida deben utilizar sus conocimientos previos (definiciones, reglas, fórmulas, algoritmos, etc.), los cuales les permitan plantear un proceso para llegar a la solución, así como la posibilidad de modificarlo si no es el procedimiento correcto, para finalmente explicar y justificar su respuesta (Orozco, 2020).

Entre los aspectos en que se enfoca la resolución de problemas se encuentra el que las y los alumnos logren interpretar correctamente la información contenida en la situación, apliquen sus conocimientos matemáticos en la resolución y hagan sus razonamientos matemáticos para que logren justificar sus procedimientos y expliquen mediante argumentos las diferentes soluciones encontradas.

En la evaluación diagnóstica se indagó si las y los estudiantes logran resolver problemas que impliquen determinar la medida de una de las dimensiones de un prisma recto tomando en cuenta el valor de su volumen y el de otras dimensiones conocidas.

El prisma pentagonal que se muestra tiene un volumen de 4 950 cm^3.



¿Cuánto mide cada uno de los lados de la base del prisma?

A) 49.5 cm

B) 20 cm

C) 12 cm

D) 3 cm

El prisma recto al que se hace referencia en el reactivo es pentagonal y su volumen es 4 950 cm^3. Además, en la imagen que lo representa se incluyen las medidas de la altura del prisma (20 cm) y de la apotema de su base pentagonal (8.25 cm). El problema pretende que a partir de esta información las y los alumnos logren establecer la relación entre los datos dados y la fórmula del volumen del prisma para encontrar la medida faltante: la del lado de la base del prisma.

Al establecer la sustitución de valores en la fórmula para obtener el volumen se plantea una ecuación de primer grado que permite calcular el perímetro del polígono regular de la base.

El **volumen** es el espacio que ocupa un cuerpo geométrico en tres dimensiones.

Para obtener el volumen de un prisma recto es necesario aplicar la fórmula:

Volumen de un prisma recto = Área de la base × altura

Volumen de un prisma recto = $\text{Área de la base} \times \text{altura}$

Donde el área de la base es:

$$\text{Área de la base} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

$$\text{Área de la base} = \frac{5 \times l \times \text{apotema}}{2}$$

$$\text{Área de la base} = \frac{5 \times l \times (8.25\text{ cm})}{2}$$

Sustituyendo los datos conocidos:

Volumen

apotema

$$4\,950\text{ cm}^3 = \frac{(8.25\text{ cm} \times \text{Perímetro de la base})}{2} \times 20\text{ cm}$$

Ecuación de primer grado

altura

La expresión equivalente del perímetro, en este caso es:

$$4\,950\ \text{cm}^3 = \frac{(8.25\ \text{cm} \times 5 \times l\,)}{2} \times (20\ \text{cm})$$

Expresión equivalente de la ecuación de primer grado

Despejando para obtener la medida del lado de la base:

$$l = \frac{(2)\,(4\,950\,\text{cm}^3)}{(20\ \text{cm})\,(8.25\ \text{cm})\,(5)} = \frac{9\,900\ \text{cm}^3}{825\ \text{cm}^2} = 12\ \text{cm}$$

De esta manera se ha obtenido la medida del lado de la base del prisma recto pentagonal cuyo volumen es 4 950 cm^3 y es 12 cm, en el reactivo corresponde a la opción C). Como se observa en el procedimiento, para determinar la medida del lado de la base no solamente se deben tener en cuenta el proceso de cálculo (las operaciones que se deben realizar) sino la comprensión de lo que esas cantidades y operaciones representan. Por ejemplo, comprender que la fórmula del volumen implica el área de la base por la altura, aunque solamente se hace referencia explícita a dos referentes, ahí están las tres dimensiones, porque el área es bidimensional, en este caso, por ser un pentágono es la mitad del perímetro por la apotema (si la base fuera un triángulo, el área es la mitad del lado por la altura).

Algunas o algunos estudiantes podrían confundirse al no sustituir todos los valores de forma correcta en la fórmula del volumen del prisma recto, creando una fórmula diferente y por lo tanto un procedimiento incorrecto. Por ejemplo, no tomar en cuenta el valor de la apotema y utilizar únicamente el valor del volumen del prisma, su altura y el número de lados de la base que en este caso es 5 por ser un pentágono. Obteniendo $\frac{4\,950\ \text{cm}^3}{20\ \text{cm} \times 5} = 49.5$ cm, resultado que corresponde a la opción del inciso A.

Otras y otros alumnos al no contar con las habilidades necesarias para dibujar e imaginar los cuerpos geométricos podrían interpretar inoportunamente las dimensiones del prisma pentagonal y confundir la altura del prisma (20 cm) con el valor de las longitudes de los lados de este y dar como respuesta el inciso B.

Una equivocación diferente puede presentarse cuando las y los alumnos establecen la relación adecuada de todos los datos conocidos y desconocidos para obtener el volumen, pero cometen errores de cálculo o algoritmos en la resolución del problema, como es el caso del inciso D, en el que hace el siguiente despeje y olvida que la constante 2 debe multiplicar al valor del volumen, y lo mantiene como divisor.

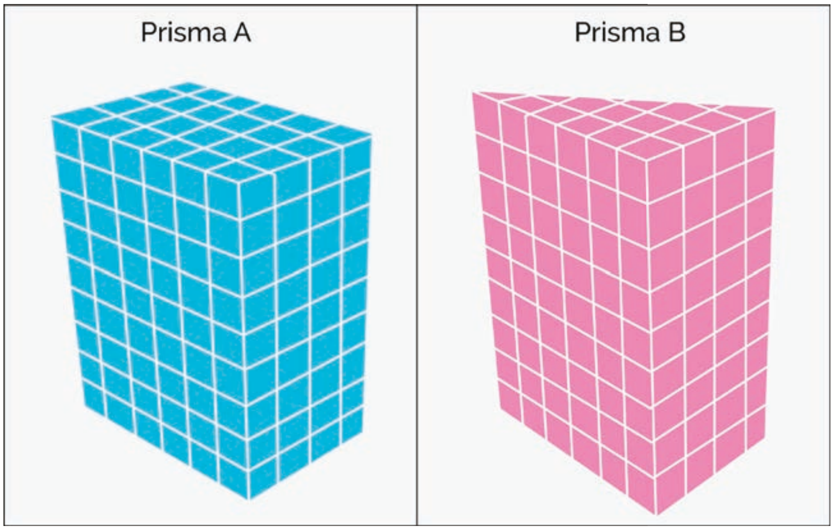
Volumen de un prisma recto = Área de la base × altura

$$l = \frac{(4\,950\ \text{cm}^3)}{(20\ \text{cm})\ (8.25\ \text{cm})\ (2)\ (5)} = 3\ \text{cm}$$

Es conveniente que las y los alumnos se familiaricen con la fórmula del volumen de un prisma para obtener el área de la base o la altura, y no únicamente utilizarla para obtener el volumen, ya que en muchas ocasiones solo memorizan el procedimiento y no comprenden lo que representa en la forma de ese cuerpo cada magnitud y medida. Además, cuando una fórmula depende de información que se obtiene a partir de la aplicación de otras fórmulas es indispensable tener claridad de otros conceptos y el empleo de ellos. Por ejemplo, se requiere tener claridad de cuáles son las variantes que se pueden tener en la fórmula del área de la base, ya que depende de la forma del polígono que se utilice como base.

Para fortalecer la comprensión e interpretación del volumen de prismas rectos se sugiere que las y los estudiantes se familiaricen con actividades como las siguientes.

1. Observen los siguientes prismas y contesten las preguntas.



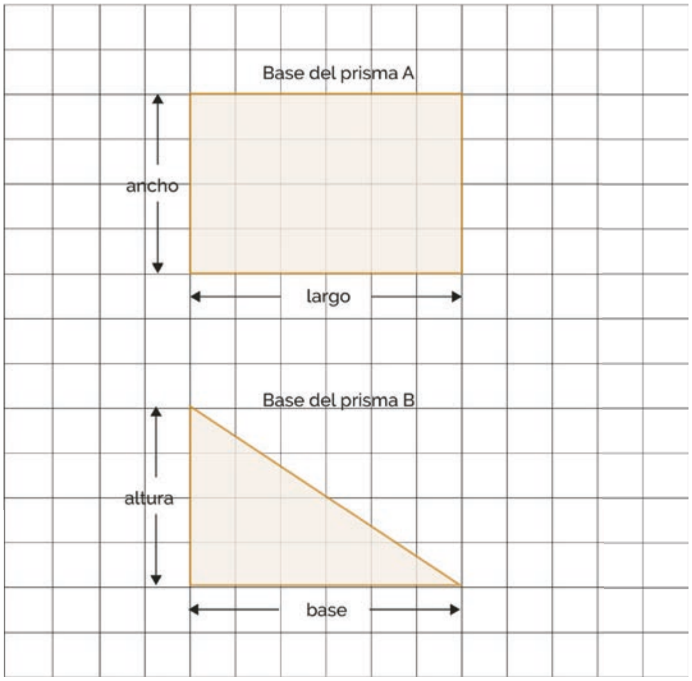
- ¿Qué forma tiene la base de cada prisma?
- ¿Cuál es el área de la base de cada prisma?
- ¿Cuántos cubos (cm^3) tiene cada prisma?
- ¿Qué datos se necesitan para calcular el volumen de cada prisma?
- ¿Cuánto mide el volumen de cada prisma?

Con esta actividad se pretende que las y los estudiantes reafirmen el conteo de unidades cúbicas y la construcción de fórmulas para calcular el volumen de los prismas rectos, las cuales comenzaron a desarrollar en su aprendizaje de Matemáticas en primer grado de secundaria.

A partir de la exploración con dos prismas, uno rectangular y otro triangular, con las mismas medidas podrán hacer conjeturas como, por ejemplo, "que la fórmula para ambos casos es la misma", lo único que se modifica es cómo obtener el área de la base si es un triángulo rectángulo o si es un rectángulo. Además, pueden referir, en este caso, que el prisma triangular tiene la mitad del volumen del prisma rectangular porque su base es un triángulo rectángulo con las mismas medidas de base y altura que el rectángulo.

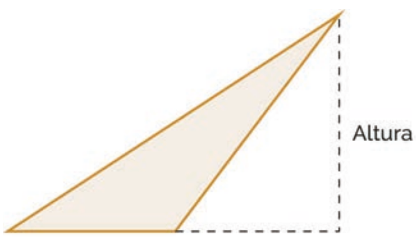
Un aspecto para practicar con las y los alumnos es enfocarse en las características geométricas de las formas de cada prisma. La forma de la base del prisma A es rectangular mientras la del prisma B es triangular, como se muestra en la imagen.

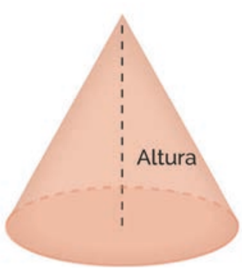
También se puede observar que la medida del largo y ancho de la base del rectángulo del prisma A es igual a la medida de la base y altura del triángulo del prisma B; ambos prismas tienen la misma medida de la altura.

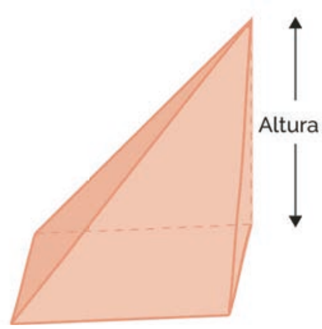


Promueva actividades donde las y los estudiantes puedan identificar los elementos geométricos fundamentales de los prismas como son las dimensiones lado, largo y ancho de la base, altura en la base y altura en los prismas.

Otro elemento geométrico que comúnmente no se comprende es el significado de la altura de las formas geométricas, tanto de dos como de tres dimensiones, hecho que les impide calcular correctamente el área de figuras o el área y el volumen de cuerpos. En las figuras con un lado "inclinado" las y los alumnos tienen dificultades para identificar la altura.







Cualquier lado de una figura plana puede ser considerado como base de dicha figura, y para cada base habrá una altura diferente.

De manera semejante ocurre con los cuerpos, cualquier cara podría ser la base y, a partir de ella, la altura cambia. Esto debe estar claro para las y los jóvenes antes de comenzar a usar fórmulas en las que se calcule la base, altura o área de la base o volumen. (Godino, Batanero y Roa, 2002, p. 687)

El uso de la fórmula para calcular el área de un triángulo implica que las y los estudiantes deben tener claro los elementos geométricos que se emplean tales como: base, altura, perpendicularidad, perímetro o área.

Preguntas de reflexión

- ¿Cómo se obtiene el volumen de un prisma?
- ¿Qué relación encuentran entre el procedimiento para obtener el volumen de un prisma rectangular y el volumen de un prisma triangular?
- ¿Cómo redactarían la fórmula para obtener el volumen para cualquier prisma?
- ¿Qué elementos geométricos deben conocer para determinar el volumen de cualquier prisma?

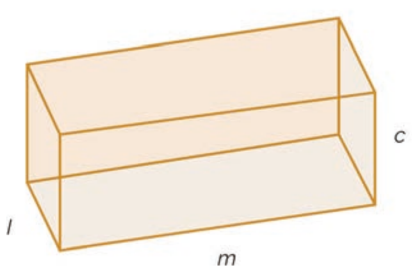
El uso de la fórmula para calcular el volumen de un prisma implica que las y los alumnos deben saber reconocer los elementos geométricos que se involucran como: área de la base, altura del prisma, perpendicularidad, perímetro o área de la base, así como las características de las diferentes figuras como son triángulos, cuadriláteros y polígonos.

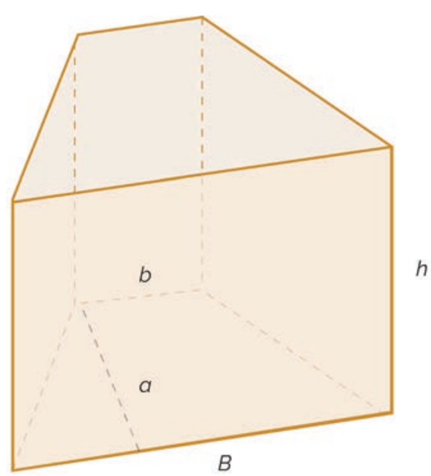
Godino, Batanero y Roa (2002) recomiendan que las y los alumnos no empleen las fórmulas sin que hayan trabajado previamente en la deducción de dichas fórmulas. El desarrollo de las fórmulas por las y los propios jóvenes es una actividad mucho más relevante y significativa que la introducción de números en tales fórmulas. Pero en cualquier caso las y los alumnos deben comprender previamente el rasgo o característica de los objetos cuyo tamaño se mide mediante las fórmulas (longitudes, perímetros, áreas y volúmenes).

Se sugiere consulten el video denominado "La enseñanza del Volumen. ¿Por dónde empezar?" En https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-recurso/597 para comprender los aspectos fundamentales que se deben abordar sobre el volumen de prismas.

2. Relacionen cada elemento geométrico que se presenta en cada prisma con la letra que lo representa.

Largo ( )
Ancho ( )
Altura del prisma ( )





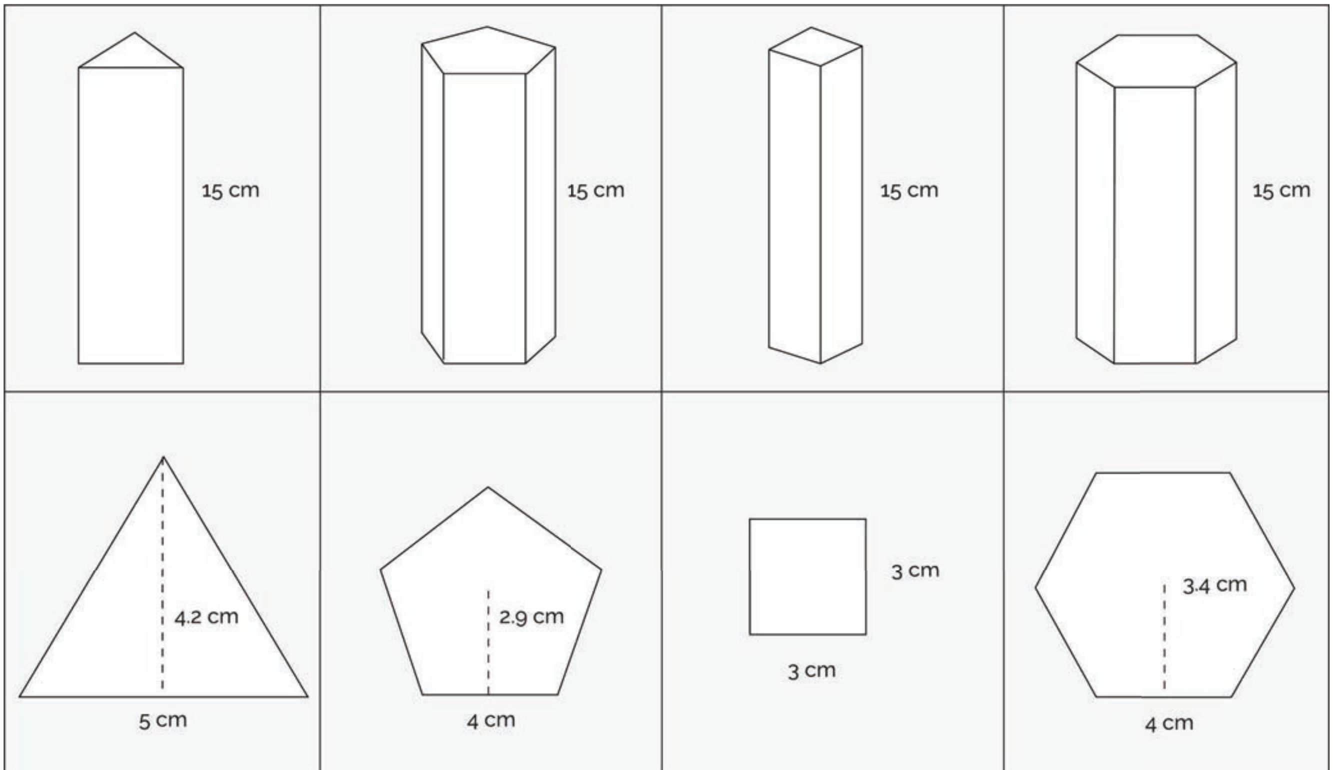
Base mayor ( )
Base menor ( )
Altura de la base ( )
Altura del prisma ( )

- ¿Qué forma tiene la base de cada prisma?
- ¿Qué forma tiene cada prisma?

Haga énfasis en que las y los alumnos deben comprender las características de los prismas que se muestran antes de iniciar con la aplicación de fórmula para medir su volumen (longitudes, perímetros, áreas y volúmenes).

Existen varios factores que influyen en la complejidad de este contenido, cualquier representación plana de un cuerpo geométrico implica alguna pérdida de información espacial, por lo que cuando las y los alumnos observan la representación plana de un sólido tiene que recuperar tanta información como le sea posible (Gutiérrez, 1996) e interpretar la figura plana que se le muestra para convertirla en un objeto tridimensional.

3. Los siguientes prismas coinciden en la medida de su altura, pero cambian las formas de su base. Calculen su volumen y contesten las preguntas.



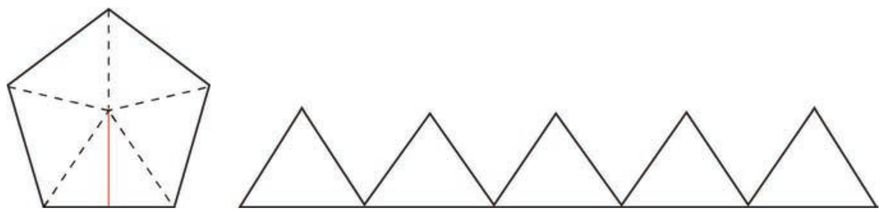
V=	*V*=	*V*=	*V*=

- ¿Cuál de los prismas será el de mayor volumen?
- ¿Cuál prisma es de menor volumen?

En esta actividad las y los alumnos pueden comparar el volumen de los prismas. Además, para encontrar la solución deben utilizar la fórmula para obtener el volumen de cada prisma. Aquí se darán cuenta que, la fórmula a emplear es la del volumen, sin embargo, deben cambiar la fórmula que utilicen para el área de la base, porque la forma de las bases es distinta, dependiendo si la base del prisma es un cuadrado ($A = l \times l$), un triángulo ($A = \frac{b \times h}{2}$) o un polígono regular ($A = \frac{P \times a}{2}$).

De igual forma, cuando calculen el área de los polígonos regulares, tendrán que aplicar la fórmula para el perímetro, $P = \frac{\text{número de lados} \times \text{medida del lado}}{2}$.

Si la o el docente observa la necesidad de recordar la aplicación y orden de cada fórmula pueden agregarse actividades donde se aclare la transformación de un polígono regular en triángulos para que las y los alumnos recuerden de donde surgen las fórmulas para obtener el perímetro y los datos necesarios a considerar en cada polígono.



En distintas evaluaciones nacionales (EXCALE, 2012 PLANEA, 2015) se han identificado diversas dificultades que tienen las y los estudiantes con el uso de las fórmulas para medir magnitudes geométricas. En particular se ha encontrado que con frecuencia las y los alumnos confunden el área con el perímetro. Una explicación de esta dificultad puede ser el haber recibido un tratamiento en su enseñanza dando énfasis en el uso de las fórmulas, sin poner mayor atención en desarrollarlas y comprender cómo y por qué funcionan las fórmulas. (Godino, Batanero y Roa, 2002)

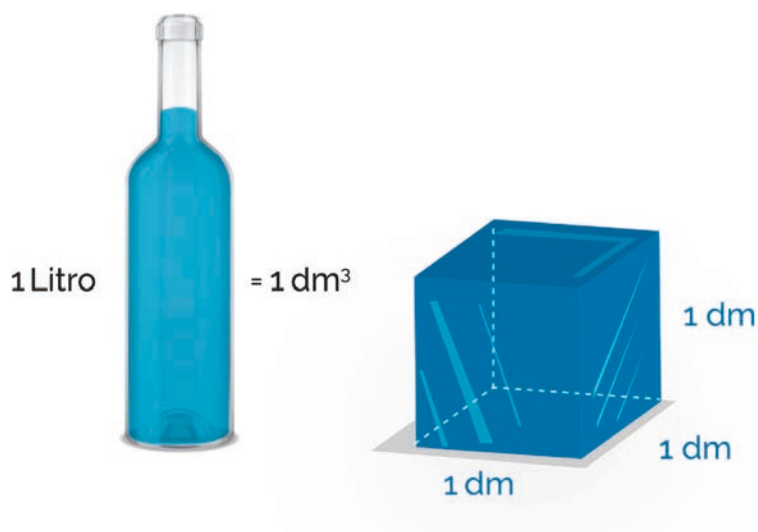
Se sugiere que se planteen situaciones relacionadas con situaciones de la vida real. Por ejemplo, en este caso, los prismas pueden relacionarse con el tipo de envases para un producto y la diferencia con los costos que originan.

4. Consideren los prismas de la actividad **3** para resolver la siguiente situación.

   Si Juan está utilizando estos prismas para el diseño de la nueva presentación de un perfume.

   - ¿Cuál envase le conviene más a Juan para dar al cliente una mejor cantidad de perfume por un mismo precio?
   - ¿Cuál presentación tiene más beneficios para el cliente? ¿Por qué?

Haga énfasis en que el volumen y la capacidad son términos usados para expresar la medida del “tamaño” de cuerpos o regiones tridimensionales. Por un lado, “volumen como espacio ocupado y la capacidad como espacio vacío con posibilidad de ser llenado” (Moreno, Gil y Frías, 2001; citado en Alcibia, 2010, p. 19). Establezca la relación entre estas dos cualidades para que las y los estudiantes vean la diferencia. Las unidades estándares de volumen se expresan en términos de unidades de longitud, como centímetros cúbicos, metros cúbicos, etc. Las unidades de capacidad se aplican generalmente a líquidos o recipientes usados para contener líquidos o materiales sueltos y son el litro, mililitro, etc.

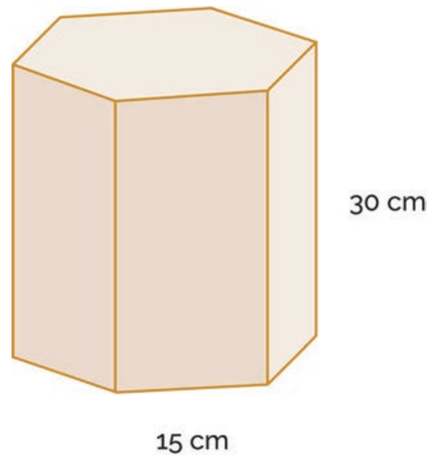


Promueva actividades donde las y los alumnos determinen cualquiera de las dimensiones involucradas en la fórmula, recordando que siempre al faltar un dato en la igualdad se tendrá una expresión algebraica que denota como incógnita un dato de alguna dimensión del volumen del prisma que puede ser la altura del prisma, lado de la base, altura de la base, largo o ancho de la base, etc., y esta puede determinarse al plantear una ecuación de primer grado para obtener el valor desconocido.

5. El volumen de una vela es de 17 550 cm^3, se diseñó con altura de 30 cm y cada lado de su base hexagonal mide 15 cm. ¿Cuál es la medida de la apotema?

Si las y los estudiantes tienen dificultades para plantear la ecuación, puede recordarles las dos fórmulas principales (volumen de un prisma – área de un polígono regular), para que a partir de ellas revisen el acomodo de la información y obtengan la ecuación que les permita resolver el problema.

Si las dificultades se presentan al momento de resolver la ecuación se sugiere recordarles las propiedades de la igualdad, para obtener la incógnita.



Preguntas de reflexión

- Si se quiere plantear una ecuación de primer grado a partir de una fórmula del volumen, ¿cómo se determina la incógnita?
- ¿Qué letra se utiliza para representar el valor a encontrar?
- ¿Qué pasos deben seguirse para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita?

Saiz (2007) refiere que:

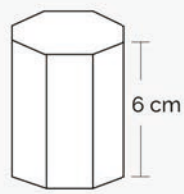
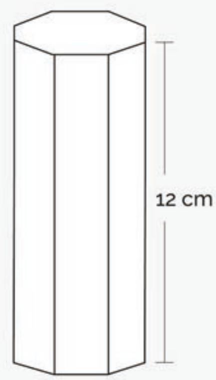
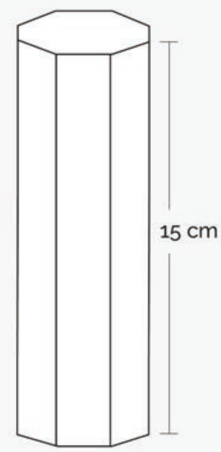
> "[...] si bien el volumen, como la longitud y el área, es una cualidad de los cuerpos susceptible de ser medida y por tanto comparte propiedades comunes a todas las magnitudes; también tiene cualidades que lo identifican y lo convierten en un concepto que se debe enseñar de manera independiente a la longitud y al área, no como una extensión de éstos." (p. 7).

Recuerde que al abordar el volumen de los prismas se requiere que las y los estudiantes pongan en juego habilidades de imaginación espacial, estimación, comparación y cálculo.

Más actividades

Resuelvan los siguientes problemas.

1. A continuación, se presentan tres prismas, los cuales coinciden en tener la misma base, pero cambia su altura. ¿Cuál es el volumen de cada uno?

Base del prisma	Prisma octagonal 1	Prisma octagonal 2	Prisma octagonal 3
			
	V=	V=	V=

- ¿Existe alguna relación entre las medidas de las tres respuestas obtenidas?
- ¿Podrían encontrar el resultado del volumen del prisma octagonal 2 a partir de conocer el volumen del prisma octagonal 1?
- ¿Qué relación tiene el volumen del prisma octagonal 3 con el volumen del prisma octagonal 1?

2. Una fábrica va a construir un depósito usando paneles rectangulares prefabricados que tienen 2 metros de ancho y 4.25 metros de alto.

Se tienen disponibles seis paneles de este tipo, de modo que se puede construir un depósito con forma de prisma hexagonal, usando los paneles como las caras del prisma. Sin tomar en cuenta el grosor del material de los paneles.

- ¿Qué volumen tendrá este prisma hexagonal?
- ¿Qué volumen tendría si los paneles tuvieran la misma altura, pero midieran 3 metros de ancho?
- ¿Qué tipo de prisma se tendría si en lugar de seis paneles se contara con cinco? ¿Cuál sería el volumen de este prisma?

3. Un mecánico recibió piezas para armar un motor nuevo, entre las que se encuentra una con forma de prisma pentagonal, pero las características de esta pieza estaban incompletas. El mecánico sabe que la base de la pieza tiene una apotema de 3.44 cm, una altura de 8 cm y un volumen de 344 cm^3.
    - ¿De qué medida son los lados de la base?
    - Si el mecánico necesitara una pieza que midiera el doble de apotema, ¿de qué medida serían los lados de la base? y ¿cuál sería el volumen de la pieza?

Análisis de datos

En esta unidad de análisis se consideran temas de estadística y de probabilidad. En cuanto a los contenidos estadísticos están las medidas de tendencia central y las de variabilidad que permiten la interpretación de datos. Dentro de las medidas de variabilidad se introduce el concepto de desviación media.

Propósito

Proponer estrategias de enseñanza que apoyen la obtención, interpretación, análisis y elaboración de conclusiones con respecto a conjuntos de datos estadísticos que pueden estar organizados y presentados en diversas maneras (tablas o gráficas estadísticas) e incluso corresponder a situaciones de incertidumbre. En el análisis de los datos se decide cuál o cuáles son los valores que mejor describen, representan y resumen al conjunto tanto en su tendencia central como en su dispersión a partir de medidas como la desviación media y el rango.

Reactivos asociados de la prueba diagnóstica de 3º de secundaria

Estadística: 41, 42, 43, 44 y 45. Probabilidad: 46, 47, 48, 49 y 50.

Aprendizajes esperados de 3º de secundaria

- Compara la tendencia central (media, mediana y moda) y dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos.
- Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes

Sugerencias de estrategias de enseñanza

- **Recolección, registro y lectura de datos.** Presentar en distintos portadores como tablas, histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea, entre otros, a conjuntos de datos estadísticos de tipo nominales, ordinales, continuos o discretos para analizarlos. Si es posible promover el uso de la hoja de cálculo electrónica para elaborar tablas, gráficas de barra, histogramas y polígonos de frecuencias.
- **Tendencia central y variabilidad de datos estadísticos.** Usa e interpreta los valores de la moda, media aritmética, mediana, rango y desviación media de un conjunto de datos y decide cuál o cuáles de ellas conviene más en el análisis de los datos. Si es posible utilice la hoja de cálculo electrónica para calcular los valores de las medidas de tendencia central y del rango y la desviación media de datos no agrupados para

centrarse en el análisis de los valores de estas medidas que permitan dar conclusiones y tomar decisiones y no en el cálculo. También se recomienda el uso de la calculadora.

- **Probabilidad.** Predecir la probabilidad de un evento en un experimento aleatorio y luego llevarlo a cabo (incluso simularlo) para registrar datos, reunirlos y calcular la probabilidad frecuencial para compararla con la probabilidad teórica. Si es posible promover el uso de la hoja de cálculo electrónica para simular experimentos aleatorios mediante la función "ALEATORIO".

Medidas de tendencia central y desviación media

En estadística la información se organiza en tabla o gráficas estadísticas de acuerdo con el tipo de datos, pero para proceder a su análisis es necesario resumir esta información en valores numéricos que sean descriptivos, representativos y permitan hacer comparaciones, elaborar conclusiones y tomar decisiones y para ello se utilizan las medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética o promedio), que permiten determinar un valor numérico para representar un conjunto de datos no agrupados, así como las medidas de variación (desviación media o rango) que sirven para identificar que tan homogéneos o dispersos están los datos.

En la evaluación diagnóstica se indagó si las y los estudiantes realizan una interpretación adecuada de los valores de la desviación media y de la media aritmética de un conjunto de datos.

Ameyalli quiere comprar un cuaderno de dibujo. Investigó el precio en distintas papelerías y obtuvo que el promedio de precios es $45 con una desviación media de $3.

¿Qué significa que la desviación media sea $3?

A) En promedio, el precio de los cuadernos es menor a $42.

B) En promedio, el precio de los cuadernos es mayor a $48.

C) En promedio, el precio de los cuadernos es menor o igual a $42 y mayor o igual a $48.

D) En promedio, el precio de los cuadernos es mayor o igual a $42 y menor o igual a $48.

Papelería	Precio ($)
ABC	46
Cien hojas	44
Crea	50
El compás	52
El gran libro	41
Imagina	43
La casa del papel	42
La escuelita	39
Mil trazos	48
Odisea	45
Papel y algo más	47
Planeta escolar	43

Las y los estudiantes deben reconocer e interpretar a la desviación media como una medida de variabilidad respecto a la media aritmética. En este caso, el valor de la desviación media es $ 3 con respecto al valor de la media aritmética de $ 45, y en el contexto de la situación su interpretación implica que el precio promedio de una libreta está entre $ 42 y $ 48, que corresponde a la opción del inciso D.

En este reactivo la atención se centra en analizar las afirmaciones que se plantean a partir de los valores de la desviación media y de la media aritmética de un conjunto de datos no agrupado, donde las y los estudiantes no realizan ningún tipo de cálculo, sino se trata de evaluar su comprensión del significado de dichos valores y su correcta interpretación en el contexto de la situación.

Particularmente, este reactivo es un ejemplo del tipo de actividades que se pretende que los y las alumnos sean capaces de hacer para elaborar conclusiones respecto a un conjunto de datos a partir de los valores de sus medidas de tendencia central y de dispersión mostrando también la manera en que dichos valores se complementan para tener una imagen más completa y precisa del conjunto de datos que representan.

Al responder este reactivo, las y los estudiantes pueden tener diferentes dificultades que los lleve a cometer errores que se pueden clasificar de dos tipos:

a) Error del lenguaje estadístico. Este tipo de error se asocia a la expresión oral y escrita de la terminología y notaciones propias del lenguaje estadístico y de su interpretación, debido probablemente a que en él se producen conflictos con el lenguaje de uso cotidiano, a la precisión que se requiere en el uso del lenguaje matemático.

   Este error se hace evidente cuando la o el estudiante interpreta inadecuadamente los términos de desviación media y promedio. Por ejemplo, considera que la relación de la desviación media con respecto a la media aritmética (identificada como promedio en el contexto) únicamente implica una diferencia (o aumento), por lo que considera que el valor de la desviación media con respecto a la media aritmética le influye en un sólo sentido e interpreta que los precios de la libreta "corren" con valores menores que \$ 42; mientras que otras y otros estudiantes lo consideran de manera contraria centrándose en que el valor de la desviación media influye por "arriba" de la media aritmética (calculan mentalmente \$ 45 + \$ 3 = \$ 48), con lo cual hacen una interpretación de los valores de esas medidas en el contexto de la siguiente manera: precios de la libreta mayores que \$ 48, opción presentada en el inciso B.

   En ambos casos, las y los alumnos están seleccionando afirmaciones en las que el concepto de media aritmética es incorrecto, ya que los valores que están considerando excluyen al valor de la media aritmética. En este caso, se podría representar en un polígono de frecuencias la situación y ubicar el valor de la media aritmética y de la desviación media para mostrar que estas afirmaciones hacen referencia a intervalo de valores extremos que dejan fuera a la media aritmética.

b) Errores de transferencia. Se deben a la falta de habilidad para usar los conocimientos adquiridos para resolver situaciones problemáticas reales. Las y los estudiantes no logran establecer una relación entre la información del promedio y la desviación media con los datos que se presentan en la tabla para una correcta interpretación; es el caso de la selección como respuesta del inciso C.

Diversos estudios en didáctica de la Estadística refieren que la enseñanza de las medidas de tendencia central y dispersión se han limitado a la aplicación de fórmulas, sugiriendo que las y los docentes carecen de una comprensión profunda de estos conceptos, lo que les dificulta poder ofrecer a las y los jóvenes propuestas de enseñanza donde estas medidas cobren sentido (Silva y Coutinho, 2008; citado en Pallauta, Bonilla y Olivares, 2019).

Sánchez (2013) y Batanero *et al.* (2015) confirman lo citado anteriormente, agregando que, aunque las y los alumnos son capaces de determinar diferentes medidas de dispersión, presentan dificultades en comprender los procesos y los conceptos involucrados, lo que posteriormente se agudiza con el estudio de la inferencia.

Para determinar cuál es la medida de tendencia central que mejor representa a un conjunto de datos es necesario tomar en consideración las características de los datos que se analizan, como por ejemplo si son variables de tipo nominal (cualitativa), ordinal (cuantitativa), discreta o continua.

Las **medidas de posición** o **tendencia central** son los valores alrededor de los cuales se agrupan los datos, en ellas se incluye a la media aritmética, mediana y moda.

A continuación, se proponen actividades donde la atención se centra en identificar la medida de tendencia central que represente un conjunto de datos de acuerdo con sus características, así como utilizar la desviación media para determinar el comportamiento de la homogeneidad o dispersión de los datos.

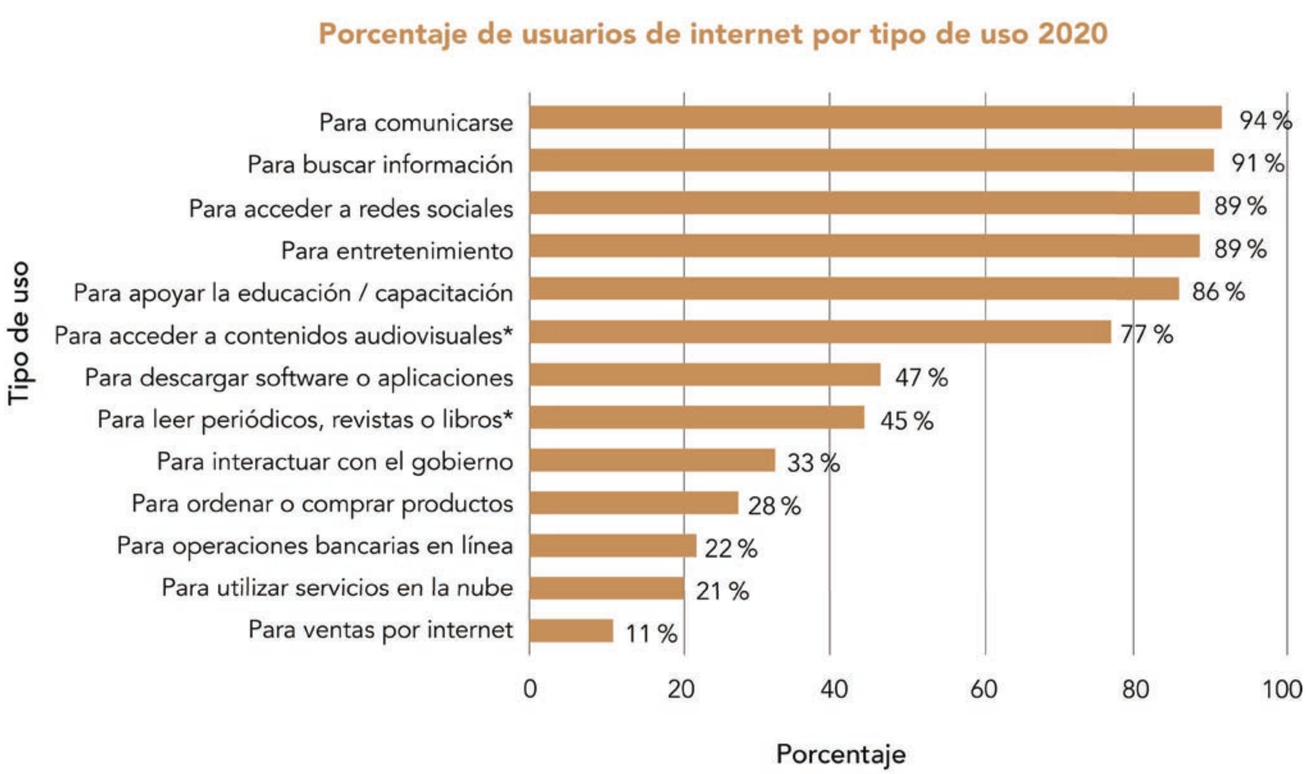
Moda

Algunas veces hemos escuchado frases como las siguientes: "Está de moda ir a ...", "Este tipo de pantalón está de moda" o "Se ha puesto de moda el grupo...", y se comprende que hay una buena cantidad de personas que han elegido esas opciones de lugar, ropa o música. Así que, el valor que más frecuencia tiene es el de la “moda"; y puede ocurrir que haya más de una.

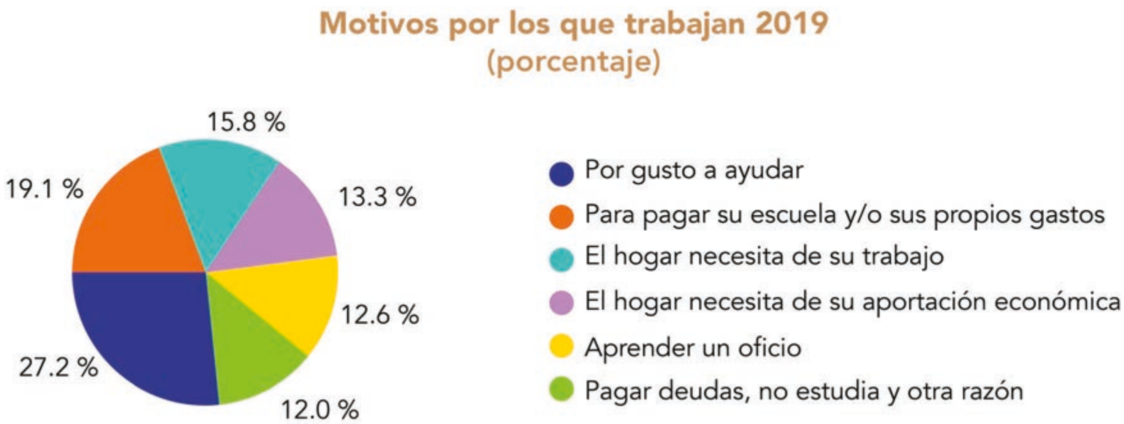
La moda, Mo, es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia, cuando la variable es cualitativa no podemos calcular la media aritmética, entonces la moda es el promedio que describe al conjunto de datos. En una distribución puede haber más de una moda. Si existe una sola moda se denomina unimodal, si hay dos bimodal, si hay más de dos se llama multimodal. También se puede determinar la moda en variables numéricas.

1. Presente a las y los estudiantes las siguientes situaciones:

   a) Pida que analicen los datos:



*Estas opciones de respuestas están consideradas dentro de la opción “entretenimiento”.
Fuente: INEGI, Encuesta Nacional sobre Disponibilidad y Uso de Tecnologías de la información en los hogares (ENDUTIH) 2020.



Fuente INEGI. Encuesta Nacional de Trabajo Infantil (ENTI) 2019.

Países seleccionados.
*Los datos provienen de diferentes fuentes y años.
Fuente: rhesusnegative.net

b) Solicite que respondan las preguntas, sin realizar cálculos.

- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de mejor manera el tipo de uso que los usuarios le dan al Internet en México?
- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada el motivo por el trabajan en México?
- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada los grupos sanguíneos?

c) Una vez que han contestado las preguntas, solicite que expliquen porque seleccionaron esa medida de tendencia central.

Haga énfasis en que los datos que contienen las gráficas mostradas son cualitativos porque presentan diversas cualidades que no pueden ser medidas con números, son nominales discretas, por lo que no pueden ordenarse. En este tipo de datos, cuyas variables son nominales, la medida de tendencia central que los representa es la moda (dato que se presenta con mayor frecuencia), no así la media y la mediana debido a que los datos (variables) no son numéricos y tampoco se pueden ordenar.

Mediana y Media aritmética

La mediana, Me, es el valor que ocupa la posición central una vez ordenados los datos de un conjunto. Por ejemplo, en orden creciente, el valor de la mediana es mayor que el 50 % y menor que el otro 50 %. La mediana divide la distribución de los datos en dos partes con igual número de datos.

La media aritmética, M, también llamada promedio o media es el valor resultante que se obtiene al dividir la sumatoria de un conjunto de datos sobre el número total de datos y solo es aplicable para el tratamiento de datos cuantitativos.

1. Pida que analicen los datos:

Calificaciones por mes										
Alumnos	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
Ana	5	6	6	6	8	8	8	8	10	10
Alán	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10

Ana		Alán	
Media aritmética:	7.5	**Media aritmética:**	7.5
Moda:	8	**Moda:**	10 y 5
Mediana:	8	**Mediana:**	7.5

2. Solicite que respondan las preguntas, sin realizar cálculos:

- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada las calificaciones de Ana?
- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada las calificaciones de Alán?
- A partir de la información de las calificaciones de Ana y Alán, ¿quién se pude decir que tiene un rendimiento constante?
- Una vez que han contestado las preguntas, solicite que expliquen sus respuestas.

3. Pida que analicen los datos:

Puntos obtenidos en cada juego			
Juego	Daniel	Pedro	Jesús
1	2	7	5
2	9	2	6
3	10	2	5
4	2	6	5
5	3	6	5
6	1	3	5
7	9	6	4
8	9	7	5
9	1	6	6
10	4	5	4

	Daniel	**Pedro**	**Jesús**
Media aritmética:	5	5	5
Moda:	9	6	5
Mediana:	3.5	6	5

4. Solicite que respondan las preguntas, sin realizar cálculos:

- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada los puntos que obtuvo Daniel en los juegos?
- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada los puntos que obtuvo Pedro en los juegos?
- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada los puntos que obtuvo Jesús en los juegos?
- A partir de la información de los puntos que obtuvo cada jugador, ¿quién se pude decir que es un jugador constante?
- Una vez que han contestado las preguntas, solicite que expliquen sus respuestas.

5. Pida que analicen los datos:

Salto en cm de cada alumno										
Alumnos	Salto 1	Salto 2	Salto 3	Salto 4	Salto 4	Salto 6	Salto 7	Salto 8	Salto 9	Salto 10
José	115	112	126	119	115	138	107	115	104	105
Mario	128	115	128	106	115	109	132	145	102	115

José		Mario	
Media aritmética:	115.6	Media aritmética:	119.5
Moda:	115	Moda:	115
Mediana:	115	Mediana:	115

6. Solicite que respondan las preguntas, sin realizar cálculos:

- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada las distancias que salta José?
- ¿Cuál es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada las distancias que salta Mario?
- A partir de la información de las calificaciones de las distancias que salta cada alumno, ¿quién se pude decir que es constante en sus saltos?
- Una vez que han contestado las preguntas, solicite que expliquen sus respuestas.

Centre la atención en los conjuntos de datos en los que se incluyen valores extremos, además haga notar a las y los alumnos que en esos casos es cuando la mediana es la medida de tendencia central que mejor representa a los datos, en lugar de la media aritmética. Si no recuerdan que la variación es otro elemento para considerar, sugiéralo.

Oriente el análisis para que identifiquen qué tienen en común los conjuntos de datos, es decir, el tipo de variable que se incluye para que identifiquen que son datos de tipo ordinal y continuos, que pueden ordenarse de mayor a menor y agruparse para obtener la media aritmética.

Para terminar, mencione que en el tipo de datos que se incluyen en los ejemplos que analizaron se puede utilizar la mediana como medida de tendencia central porque representa el conjunto de datos cuando los valores extremos (muy grandes o muy pequeños) afectan al promedio.

Al determinar la mediana de un conjunto de datos es necesario tener presente que no se utilizan todos los datos, por lo cual no puede aplicarse a la distribución de variables cualitativas. Algunas de las ventajas de la mediana es que no es afectada por valores extremos por lo cual es un valor representativo en datos que tienen una distribución asimétrica o cuando se incluyen valores atípicos. Cuando se modifica uno o dos datos no se afecta el valor de la mediana.

Con respecto a la media aritmética señale que se utiliza para representar un conjunto de datos cuando tienden a acumularse alrededor del promedio. El valor de la media aritmética no siempre se usa de manera adecuada, lo cual puede generar interpretaciones erróneas sobre el comportamiento de los datos, por ejemplo: se tiende a ubicar a la media aritmética en el centro de los valores, esto solo ocurre cuando los datos tienen una distribución simétrica, esto no es cierto cuando los datos tienen un comportamiento asimétrico y el promedio se ubica en uno de los extremos, por lo que las otras medidas de tendencia central podrían considerarse como valores que representan de mejor manera el conjunto de datos (moda o mediana).

Desviación media

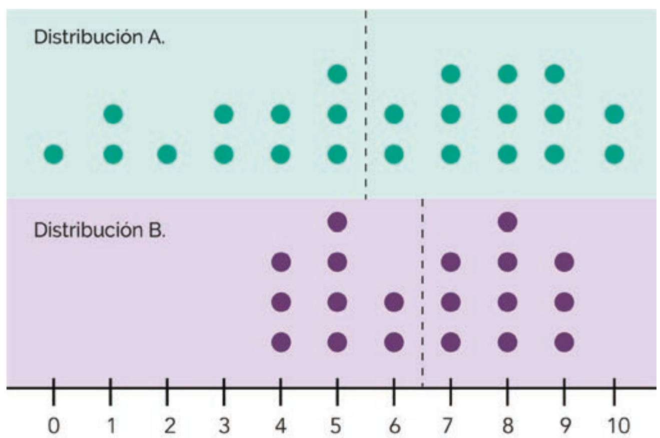
Medidas de dispersión. Proporcionan una medida de la desviación de los datos con respecto a los valores de tendencia central (recorrido, varianza,...)

Desviación media (*Dm*): Equivale a la sumatoria del valor absoluto de las distancias existentes entre cada dato y la media aritmética entre el número total de datos.

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{X}|}{n}$$

Las medidas de tendencia central indican los valores alrededor de los cuales se distribuyen los datos. En cambio, las de dispersión son estadísticos que proporcionan una medida del mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central. Todas ellas son valores mayores o iguales a cero, porque un valor cero representa la ausencia de dispersión.

En esta sección vamos a abordar la desviación media como la medida de dispersión que sirve para calcular cuánto se desvían en promedio los datos de la distribución de la media aritmética. La desviación media no hace diferencia entre números que se desvían hacia "arriba" de la media aritmética o números que se desvían hacia "abajo" de la media, lo único que importa es el valor promedio que se desvían los datos, sin importar si son números mucho mayores o mucho menores a la media aritmética, por este motivo en la fórmula de la desviación media se hace uso de valores absolutos.

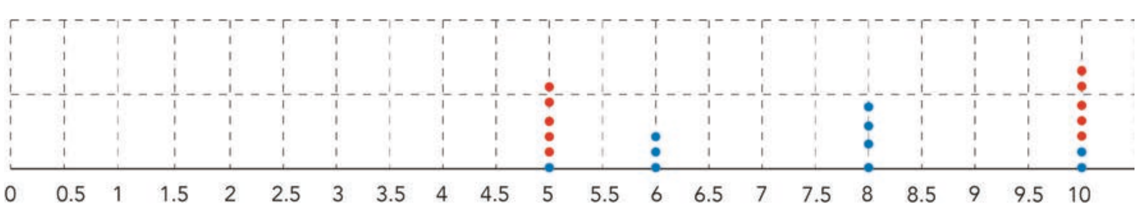


Esta medida se calcula como la media de los valores absolutos de las diferencias entre la media aritmética y los diferentes datos. Además, posibilita describir la variación en un conjunto de datos. Por ejemplo: en la distribución A los datos están más dispersos que en la distribución B. En otras palabras, los puntos están más alejados de la media, esta información se puede obtener a partir de determinar la desviación media.

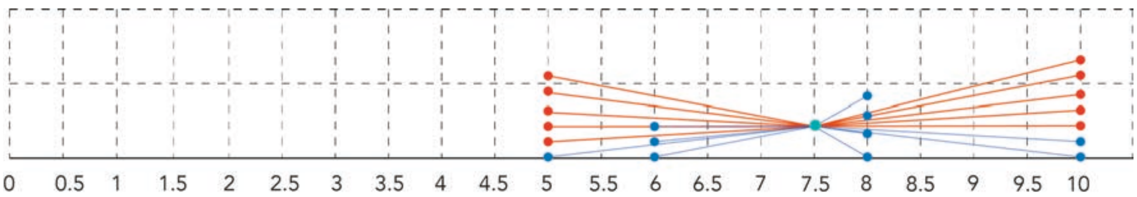
Retome los ejemplos que se incluyen en la sección anterior, en la actividad 1, para que las y los alumnos analicen la variación de los datos.

a) Pida que en sus cuadernos tracen una recta numérica para ubicar las calificaciones de Ana y Alán.

b) La recta será como la siguiente, los puntos rojos son de las calificaciones de Alán y los azules los de Ana.



c) Representen las diferencias entre la media aritmética y cada uno de los valores. Analicen cómo se comportan las calificaciones de cada uno.



d) Verifiquen sus conclusiones calculando la desviación media, con base en la representación gráfica y el valor numérico pida que contrasten la respuesta que dieron a la pregunta ¿quién se pude decir que tiene un rendimiento constante?, de la actividad anterior.

e) Solicite que realicen el mismo ejercicio para los datos de los puntos obtenidos por los tres jugadores y las distancias que saltan José y Mario, para contrastar sus respuestas.

Preguntas de reflexión

- ¿Cuáles son las características de un conjunto de datos, donde la moda es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada esos datos?
- ¿Cuáles son las características de un conjunto de datos, donde la mediana es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada esos datos?
- ¿Cuáles son las características de un conjunto de datos, donde la media aritmética es la medida de tendencia central que representa de forma adecuada esos datos?
- ¿Qué información se puede obtener de la desviación media de un conjunto de datos?

Con relación a las medidas de dispersión, la que se aborda en la educación secundaria es la desviación media, y se utiliza para analizar cómo varía cada dato en relación con la media aritmética y en consecuencia si esta medida de tendencia central representa de manera adecuada, o no, al conjunto de datos al determinar qué tan homogéneos o heterogéneos son los datos.

Para que las y los estudiantes identifiquen la pertinencia de cada una de las medidas de tendencia central, es necesario no solo que comprendan la manera en que cada una de estas medidas se obtiene, sino además es necesario que se analicen las características que tienen los datos. Para ello es recomendable analizar casos extremos como los que se incluyen en los ejemplos.

Es importante que tenga presente que cuando se calculan las medidas de dispersión, los datos no son sólo números, sino que obedecen a un contexto, en el que se requiere una adecuada interpretación de los valores obtenidos, con el objeto de tomar las mejores decisiones en determinadas situaciones. Además, promueva la enseñanza de las medidas de dispersión vinculándolas con las medidas de tendencia central, ya que se complementan para el análisis exploratorio de los datos.

En la educación secundaria al abordar los temas relacionados con estocásticos (estadística y probabilidad) la atención debería centrarse en que las y los estudiantes analicen datos para tomar decisiones o elaborar conclusiones, por ello se proponen actividades donde ellos no tiene que realizar cálculos sino usar los resultados para elaborar conclusiones sobre información que de ellos se derivan.

Más actividades

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Rebeca investigó cuántas horas a la semana se trabaja en distintos países y registró la información en la siguiente tabla.

País	Horas trabajadas semanalmente por trabajador
México	41
Costa Rica	41
Corea del Sur	39
Rusia	38
Estados Unidos	34
España	33
Italia	33
Francia	29

- En promedio, ¿cuántas horas a la semana trabajan las personas en estos países?
- ¿Cuál es la desviación media del número de horas a la semana que se trabaja en estos países?

2. Un equipo de basquetbolistas obtiene los siguientes puntos en los partidos de dos temporadas:

Temporada 1: 31, 32, 32, 33, 28, 26, 26, 26, 27, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 28, 28, 29, 29, 29, 29, 29, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30

Temporada 2: 11, 30, 12, 34, 20, 22, 21, 24, 27, 20, 17, 21, 28, 22, 20, 12, 20, 12, 29, 22, 25, 20, 30, 23, 20, 11, 10, 20, 20

- ¿Cómo describirías el desempeño del equipo en cada temporada?
- ¿En cuál temporada el equipo fue más consistente?

3. El señor Raúl tiene una tienda de abarrotes. Quiere saber en promedio cuánto compran sus clientes en la tienda y qué tanto varía lo que gastan. Para ello, empezó a registrar lo que compraron sus primeros clientes de la mañana y completó la siguiente tabla.

No. de cliente	Qué compró	Cuánto gastó ($)
1	1 litro de leche y 1 panqué	47.00
2	1 paquete de salchichas	29.00
3	1 paquete de galletas	10.00
4	1 kg. de detergente para ropa	34.00
5	1 paquete de papel higiénico	21.00
6	1 galón de agua purificada	39.00

- ¿Cuánto gastaron en promedio los seis clientes en la tienda?
- ¿Cuál es la desviación media de estos datos?
- Interpreta el promedio y la desviación media de estos datos. ¿Cómo le explicarías al señor Raúl qué significan el promedio y la desviación media de lo que gastan sus clientes en la tienda?

Referencias bibliográficas

Alcibia, E. (2010). *Propuesta psicoeducativa en la construcción de concepto de volumen en niños de 6° grado de primaria.* Tesis de licenciatura. México. Universidad Pedagógica Nacional. http://200.23.113.51/pdf/27201.pdf

Batanero, C., & Godino, J. (2001). Análisis de datos y su didáctica. *Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.*

Batanero, C., López-Martín, M., González-Ruiz, I. y Díaz-Levicoy, D. (2015). Las medidas de dispersión en el estudio de la inferencia estadística. En Vásquez, C., Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, F. (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 312-316). Sociedad Chilena de Educación Matemática: Villarrica. http://funes.uniandes.edu.co/8376/1/Medidas_de_dispersi%C3%B3n.pdf

Bishop, A. (1999) Enculturación Matemática. Barcelona: Paidós.

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de Magnitudes. Didáctica para Maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Gutiérrez, A. (1996). *Children's ability for using different plane representations of space figuras*, en Batturo, A. R. (ed). New directions in geometry education. Brisbane, Australia, 33-42.

Hans Freudenthal (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Luis Puig,(trad.) publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001. Disponible en Web: http://www.uv.es/puigl/cap16lenguajealgebraico.pdf

Kieran, C., Filloy Yague, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Traducción de Luis Puig en Investigación y experiencias didácticas. Enseñanza de las Ciencias, 7, pp. 229-240.

Nortes Checa, A. (1991). Encuestas y precios. Volumen 28 *Matemáticas, cultura y aprendizaje.* Síntesis. España.

Pallauta, J., Bonilla, D. y Olivares, D. (2019). La desviación media: estrategias empleadas por estudiantes de secundaria en una situación didáctica. *Épsilon - Revista de Educación*. nº 102, pp. 7-23. https://www.researchgate.net/publication/337447820_La_desviacion_media_estrategias_empleadas_por_estudiantes_de_secundaria_en_una_situacion_didactica

Sáiz, M. (2007). El Volumen ¿Por dónde empezar? http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf

Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J. C. & Ruiz-Arias, P.M.(Eds.). (2020). Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of The North American Chapter of the International Group for The Psychology of Mathematics Education, México. Cinvestav / AMIUTEM/ PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020. ISBN: 978-1-7348057-0-3. https://pmena2020.cinvestav.mx/Portals/pmena2020/Proceedings/PMENA42-BRR-1656589-Orozco.pdf

Secretaria de Educación Pública (2001). Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria. México: SEP. 2ª edición.

Secretaria de Educación Pública (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral: Matemáticas. Educación Secundaria.* Plan y programa de estudios, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública (s.f.). Plan y programa de estudio de secundaria. Matemáticas. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate1.html

Secretaria de Educación Pública (s.f.). Plan y programa de estudio de secundaria. Matemáticas. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate2.html

Ursini y Trigueros.(2001) "A model for the uses of variable in elementary algebra" *en línea]. *Proceedings of the PME25*, Vol 4 pp 327–334. Disponible en Web: http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2001/137938_1. pdf

Matemáticas 3° de secundaria. Orientaciones didácticas

Primera edición, 2021
ISBN: en trámite

COORDINACIÓN GENERAL
Francisco Miranda López, Andrés Sánchez Moguel y Oswaldo Palma Coca

COORDINACIÓN ACADÉMICA
Juan Bosco Mendoza Vega y Mariana Zúñiga García

AUTORAS
María Margarita Tlachy Anell, Olga Leticia López Escudero, Luz Graciela Orozco Vaca y Elvia Perrusquía Máximo

REVISIÓN TÉCNICA
Julián Maldonado Luis, Juan Bosco Mendoza Vega y Mariana Vázquez Muñoz

DISEÑO GRÁFICO, EDICIÓN, ILUSTRACIÓN Y COORDINACIÓN EDITORIAL
Jaime Díaz Pliego, Carlos Edgar Mendoza Sánchez, Josué Arturo Sánchez González y Marisela García Pacheco

Cómo citar este documento:

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). *Matemáticas 3° de secundaria*. Orientaciones didácticas. Ciudad de México: autor.

GOBIERNO DE MÉXICO

MEJOREDU

COMISIÓN NACIONAL PARA LA MEJORA CONTINUA DE LA EDUCACIÓN